Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej
Zadania przygotowawcze do II spotkania etapu rejonowego
w dniu 18 stycznia 2020 r.

Tematyka:
1. Obliczanie pól wielokątów.
2. Układ współrzędnych.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
4. Kąty wierzchołkowe, naprzemianległe, przyległe i odpowiadające.
5. Kąty zewnętrzne i wewnętrzne różnych wielokątów.

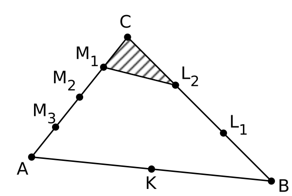
1. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ mają współrzędne: $A = (-5, 8)$, $B = (13, 0)$, $C = (5, -4)$, $D = (-7, -2)$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

2. W czworokącie $ABCD$ miary kątów wewnętrznych DAB, ABC, BCD oraz CDA pozostają w stosunku $3 : 5 : 7 : 5$. Poprowadzono dwusieczne kątów **zewnętrznych** tego czworokąta. Dwusieczne kątów o wierzchołkach A i B przecięły się w punkcie K, dwusieczne kątów o wierzchołkach B i C przecięły się w punkcie L, dwusieczne kątów o wierzchołkach C i D przecięły się w punkcie M, dwusieczne kątów o wierzchołkach D i A przecięły się w punkcie N. Oblicz miary kątów **wewnętrznych** czworokąta $KLMN$. Jaką figurą jest ten czworokąt?

3. Wierzchołki trójkąta ostrokątnego ABC mają współrzędne całkowite, przy czym $A = (-3, 1)$, $B = (-3, -4)$. Pole trójkąta ABC jest równe 35. Wypisz współrzędne wszystkich punktów, w których może znajdować się wierzchołek C. Czy wśród trójkątów spełniających warunki zadania występuje trójkąt równoramienny?

4. Dla liczb a i b określamy operacje: $a\triangle b = 3a - b + 2$ oraz $a\Box b = a \cdot (1 - b)$. Czy liczba $m = (-4)\Box[(-3)\triangle(-5)]$ spełnia równanie $(x + 2)\triangle 4 = 4\Box 9$?

5. W trapezie równoramiennym ABCD o dłuższej podstawie AB, przekątna AC jest dwusieczną kąta BAD. Wiadomo, że kąty DAB i ACB mają równe miary. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O.
   (a) Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych w trójkątach: AOB, BOC, COD i DOA.
   (b) Wskaż wszystkie odcinki, których długość jest równa długości podstawy CD.



6. W trójkącie ABC punkt K jest środkiem boku AB, punkty L_1, L_2 leżą na boku BC, przy czym $|BL_1| = |L_1L_2| = |L_2C|$, a punkty M_1, M_2, M_3 leżą na boku CA, przy czym $|CM_1| = |M_1M_2| = |M_2M_3| = |M_3A|$. Wiadomo, że pole trójkąta CM_1L_2 jest równe 2. Oblicz pole trójkąta ABC oraz pole trójkąta M_3AK.

7. Obwód prostokąta jest równy 360 cm. Dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych dzieli dłuższy bok prostokąta w stosunku $2 : 5$. Oblicz długości boków prostokąta oraz iloraz pól figur, na które dwusieczna ta rozcięła prostokąt. Rozpatrz wszystkie przypadki.

8. W trójkącie ABC o miarach kątów wewnętrznych CAB, ABC, BCA, pozostających (w podanej kolejności) w stosunku $2 : 3 : 4$, poprowadzono dwusieczne kątów wewnętrznych, które przecinają się w punkcie O. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie A_1, dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie B_1, dwusieczna kąta BCA przecina bok AB w punkcie C_1. W ten sposób utworzono wiele różnych trójkątów, do których zaliczamy między innymi trójkąt AC_1C, trójkąt BA_1O, trójkąt ABC itd. Wskaż wśród wszystkich powstałych trójkątow:
   a) dwa rójkąty równoramienne, b) parę trójkątów, które mają taki sam zestaw miar kątów wewnętrznych.

9. Punkty $A = (-8, 3)$ i $D = (-6, -4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Punkt $X = (-3, 7)$ jest środkiem boku AB. Podaj współrzędne wierzchołków B i C. Oblicz pole równoległoboku.

10. Punkt D należy do boku AB trójkąta ABC i jest różny od punktów A i B. Uzasadnij, że iloraz pól trójkątów ACD i DCB jest równy ilorazowi długości odcinków AD i DB.

11. Uzupełnij kwadraty magiczne:

$-2{,}1x^2 + 3{,}4x$		
$-0{,}3x^2 + 2{,}8x$	$4{,}5x^2 - 2x$	

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y$		$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}y$
	$-x - \frac{1}{4}y$	

12. Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = a + b - 4$ oraz $a\Box b = 3a + 4b$.
    a) Oblicz: $32 \triangle 8$, $(-6) \triangle 11$, $13\Box 7$, $(-4)\Box(-10)$, $(4\Box 11) \triangle (20\Box 13)$, $(-2)\Box[(-3) \triangle (4\Box 5)]$.
    b) Wykonaj operacje: $(3\Box x) \triangle (-2)$, $4\Box(x \triangle 2)$, $(4x - 1) \triangle (x - 2)$, $(1 - 2x) \triangle [3x\Box(-2)]$;
    c) Rozwiąż równania: $4 \triangle x = 11$, $x \triangle x = 20$, $x\Box 23 = 125$, $23\Box x = 125$, $x\Box(2x) = 70$.

13. Rozwiąż zadanie analogiczne do zadania 2. w przypadku, gdy czworokąt jest $ABCD$ jest a) prostokątem, b) równoległobokiem o ostrym kącie α, c) trapezem równoramiennym o kącie α przy dłuższej podstawie.

14. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $|AC| = |BC|$. Punkt D należy do ramienia BC. Kąt BAD ma miarę trzykrotnie **większą** od miary kąta DAC. Wiadomo też, że odcinki AD i DC są tej samej długości. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkątów ABD i ADC.

15. Punkt E należy do boku AB równoległoboku $ABCD$ i nie jest wierzchołkiem tego równoległoboku. Prosta DE przecina przekątną AC w punkcie X. Uzasadnij, że pola trójkątów AXD i EXC są równe.

16. Miary **zewnętrznych** kątów trójkąta pozostają w proporcji $4 : 3 : 2$. Znajdź miarę kąta między dwusiecznymi wychodzącymi z wierzchołków mniejszych kątów **wewnętrznych** tego trójkąta.

17. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej AC wybrano punkt X różny od punktu przecięcia przekątnych. Przez punkt X poprowadzono prostą m równoległą do boku AB, przecinającą bok AD w punkcie M i bok BC w punkcie N, oraz prostą n równoległą do boku AD, przecinającą bok AB w punkcie P i bok DC w punkcie Q. Uzasadnij, że czworokąty $MXQD$ i $PBNX$ mają równe pola.

18. W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD mamy $|BC| = |CD| = |DA|$ i przekątna AC jest prostopadła do boku BC. Oblicz miary kątów tego trapezu.

19. Punkty $A = (-2, 4)$ i $B = (4, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, którego pole jest równe 24. Znajdź współrzędne punktu C wiedząc, że: a) odcięta punktu C jest równa -3, b) trójkąt ABC jest równoramienny, c) trójkąt ABC jest prostokątny, d) trójkąt ABC jest ostrokątny.

20. Dane są punkty o współrzędnych: $(-4, -2)$, $(3, -2)$, $(-1, 4)$. Wyznacz wszystkie równoległoboki, których wierzchołki znajdują się w podanych punktach i podaj współrzędne tych wierzchołków. Który z tych równoległoboków ma największe pole?

21. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątna AC dzieli ten czworokąt na trójkąty ACB i ACD. Uzasadnij, że iloraz wysokości BB_1 trójkąta ACB i wysokości CC_1 trójkąta ACD jest równy ilorazowi pól trójkątów ACB i ACD.

22. Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-25, -30)$, $B(50, 0)$, $C(65, 40)$ i $D(0, 15)$. Przekątna AC dzieli czworokąt na dwa trójkąty: ABC i ADC. Oblicz iloraz długości wysokości h_B i h_D poprowadzonych w tych trójkątach z wierzchołków B i D do podstawy AC.

23. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC, przy czym $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{1}{3}$. Punkt P leżący wewnątrz trójkąta połączono odcinkami ze wszystkimi wymienionymi punktami. Jaką część pola trójkąta ABC stanowi łączne pole trójkątów APK, BPL i CPM?

24. Równoległobok $ABCD$ ma pole równe 60. Punkt E należy do boku AB i $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{2}$. Punkt F należy do boku BC i $\frac{|CF|}{|FB|} = \frac{2}{3}$. Oblicz pole trójkąta DEF.

25. Środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego $ABCD$ połączono odcinkami, tworząc cztery czworokąty. Pole „małego" czworokąta zawierającego punkt A ma pole P_A, podobnie pole „małego" czworokąta zawierającego punkt B jest równe P_B, a pole „małego" czworokąta zawierającego punkt C jest równe P_C. Oblicz pole czwartego „małego" czworokąta.

26. Na bokach AB, BC, CD, DE i EA pięciokąta wypukłego zbudowano kwadraty: AA_2B_1B, BB_2C_1C, CC_2D_1D, DD_2E_1E, EE_2A_1A, które nie mają punktów wspólnych z wnętrzem pięciokąta $ABCDE$. Oblicz sumę miar tych kątów $\sphericalangle A_1AA_2$, $\sphericalangle B_1BB_2$, $\sphericalangle C_1CC_2$, $\sphericalangle D_1DD_2$, $\sphericalangle E_1EE_2$, które nie mają punktów wspólnych z wnętrzem pięciokąta. Wykonaj analogiczne ćwiczenie dla innych wielokątów wypukłych.

27. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano dwa punkty D i E takie, że $|AC| = |AD|$ i $|BC| = |BE|$. Oblicz miarę kąta $\sphericalangle DCE$.

28. Na okręgu o środku O znajdują się punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ o tej własności, że kąty $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, $\ldots$, $\sphericalangle A_9OA_{10}$, $\sphericalangle A_{10}OA_1$ mają miarę $36°$. Punkty te są wierzchołkami dziesięciokąta $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$. Oblicz miary kątów przecięcia się przekątnych:
a) A_1A_3 i A_2A_4; b) A_1A_3 i A_2A_5; c) A_1A_3 i A_2A_6.

Uwaga I. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań: *Liga Zadaniowa*, str. 69-73 (zad. 1-29, 34, 36, 45, 46, 48), str. 79-87 (zad. 101, 125, 126, 128, 130, 131, 141, 142, 163, 168, 169, 172-178, 182, 183); *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 47-52, 370-457, 534-556; *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, str. 145-166; *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Kąty, Pola i obwody.
Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 392, 396, 403, 410, 425, 435, 444, 452.

Uwaga II: W soboty, począwszy od 12 października, o godzinie 10:30 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową". Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej http://liga.mat.umk.pl Serdecznie zapraszamy.