

Liga Zadaniowa - konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VI szkoły podstawowej

Zadania przygotowawcze do II spotkania etapu rejonowego w dniu 18 stycznia 2020 roku

Tematyka:

1. Własności liczb. 2. Działania na liczbach wymiernych. 3. Podzielność liczb całkowitych.

1. Uzupełnij kwadraty magiczne:

-3		
	-5	-26

		0,5
		-2,1
		0,1

26		
-61		
-4		

$(-2)^3$		-2^4
	$(-3)^2$	

2. W dniu 1 stycznia 2019 roku o godzinie 12:00 w południe pewien spóźniający się zegar (mierzący czas w skali 24-godzinnej) wskazywał godzinę 11:55, a o godzinie 18:00 pokazał 17:25. Kiedy zegar wskazywał w tym dniu prawidłową godzinę? Podaj datę (i godzinę) najbliższego dnia po 1 stycznia 2019, w którym zegar ten wskazywał ponownie właściwą godzinę.
3. W torebce jest mniej niż 200 cukierków. Ile ich jest, jeżeli wiadomo, że można je podzielić na 5 równych porcji i można je podzielić na 6 równych porcji, natomiast gdyby próbować podzielić je na 7 równych porcji, to zostałyby nam trzy cukierki.
4. Rozważmy najmniejszą liczbę naturalną, której suma cyfr jest równa 2019 oraz najmniejszą liczbę naturalną, której suma cyfr jest równa 2020.
- (a) Wyznacz pierwszą cyfrę każdej z tych dwóch liczb.
(b) Oblicz sumę cyfr sumy tych dwóch liczb.
5. Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe podzielne przez 36, w których zapisie nie występuje cyfra 0, wszystkie cyfry są parzyste i cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.
6. Ułamek prosty to ułamek o liczniku równym 1 i mianowniku będącym liczbą naturalną. Każdy z podanych ułamków: $\frac{7}{16}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, przedstaw w postaci sumy pewnej liczby różnych ułamków prostych.
7. Ułamek prosty to ułamek o liczniku równym 1 i mianowniku będącym liczbą naturalną. Ułamek $\frac{7}{12}$ wyraż w postaci sumy: (a) dwóch ułamków prostych, (b) trzech ułamków prostych o różnych mianownikach, (c) czterech ułamków prostych o różnych mianownikach.
8. Wyznacz wszystkie liczby siedmiocyfrowe podzielne przez 36, w zapisie których występują tylko cyfry 1 i 6.
9. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, które nie są podzielne ani przez 4, ani przez 5?
10. Wiek Bolka wyraża się liczbą dwucyfrową, która jest potęgą liczby 6 (potęgą o wykładniku naturalnym). Wiek Lolka wyraża się liczbą dwucyfrową, która jest potęgą liczby 2 (potęgą o wykładniku naturalnym). Łączna suma cyfr dwóch liczb wyrażających wiek Bolka i wiek Lolka jest nieparzysta. Ile jest równy iloczyn wszystkich cyfr obu tych liczb?
11. Ile jest liczb siedmiocyfrowych większych od 5000000 podzielnych przez 15, w których zapisie cyfra 0 występuje pięć razy, a pozostałe cyfry są parzyste i różne?
12. Ile jest liczb siedmiocyfrowych większych od 6000000 podzielnych przez 12, w których zapisie cyfra 0 występuje pięć razy, a pozostałe cyfry są nieparzyste i różne?
13. Dane są ułamki $\frac{44}{298}$ i $\frac{21}{369}$. Znajdź przykład liczby naturalnej różnej od zera, która przy dzieleniu przez każdy z podanych ułamków daje liczbę naturalną. Wskaż najmniejszą liczbę naturalną różną od zera o tej własności.

14. Zbyszek miał dzbanek soku. Z tego dzbanka odlał $\frac{2}{3}$ zawartości do słoika. Następnie $\frac{1}{8}$ zawartości słoika odlał do szklanki, $\frac{5}{8}$ zawartości słoika wypił, zaś resztę zawartości słoika przelał z powrotem do dzbanka. Jaki jest stosunek obecnej objętości soku w dzbanku do początkowej objętości soku w dzbanku?
15. Ile liczb naturalnych większych od 100 i jednocześnie mniejszych od 200 ma w rozkładzie na czynniki pierwsze jedynie tylko dwójki lub trójki?
16. Wyznacz pierwszą cyfrę najmniejszej liczby naturalnej, której suma cyfr jest równa 2015 oraz wyznacz pierwszą cyfrę najmniejszej liczby naturalnej, której suma cyfr jest równa 2016.
17. Piotr wypisał na tablicy wszystkie liczby trzycyfrowe o następujących własnościach: w każdej liczbie wszystkie jej cyfry są różne, a pierwsza cyfra jest równa kwadratowi ilorazu drugiej cyfry przez trzecią cyfrę. Ile liczb wypisał Piotr?
18. Czy różnica między największą i najmniejszą z liczb czterocyfrowych podzielnych przez 36 jest podzielna przez 4?
19. Znajdź liczbę trzycyfrową, która ma następujące własności. Jeśli od tej liczby odejmiemy 7, to różnica ta będzie podzielna przez 7. Jeżeli od szukanej liczby odejmiemy 8, to różnica będzie podzielna przez 8. Jeżeli od szukanej liczby odejmiemy 9, to różnica będzie podzielna przez 9.
20. Czy istnieje liczba, przez którą można skrócić ułamek $\frac{2145}{14014}$, aby po skróceniu licznik miał tyle samo cyfr co mianownik?
21. Wstaw w miejsce Δ w wyrażeniu $\frac{1}{\Delta} \cdot \Delta + \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta + \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta$ odpowiednie liczby mając do dyspozycji trzy trójki, dwie dwójki i jedną jedynkę tak, aby wartość otrzymanego wyrażenia była liczbą całkowitą. Podaj trzy różne rozwiązania. *Uwaga: Jeżeli dwie sumy różnią się tylko kolejnością składników, to uznajemy je za to samo rozwiązanie.*
22. Wyznacz wszystkie liczby pięciocyfrowe \overline{abcde} , które są podzielne przez 24 i dla których $a < b < c < d < e$.
23. Wyznacz cyfrę jedności każdej z liczb: 2^{103} , 3^{205} , 17^{47} , 84^{105} .
24. Wyznacz cyfrę jedności liczby $2^{2018} + 3^{2019} + 5^{2020}$.
25. Znajdź wszystkie liczby naturalne o cyfrach parzystych, mniejsze od 500 i podzielne przez 9.
26. Pani Krystyna hoduje psy. Ma ich tyle, że gdy dodaje do siebie liczbę psich ogonków, uszu i łapek, to otrzymuje ponad 100. Gdy zaś zsumuje tylko liczbę ogonków i liczbę łap, to otrzymuje mniej niż 80. Ile psów ma Pani Krystyna?
27. Umieść znaki działań i nawiasy tak, aby $\frac{1}{2} \frac{1}{6} \frac{1}{6057} = 2019$.
28. Ile dzielników ma liczba $49 \cdot 27$?
29. Wyznacz wszystkie liczby dwucyfrowe mające największą liczbę dzielników.
30. Ile jest liczb naturalnych mniejszych niż 2020, które są podzielne przez 4 i niepodzielne przez 3?
31. W zapisie liczby występują tylko 73 jedynki. Czy liczba ta dzieli się przez 111?
32. Wiadomo, że $p > q$. Która z liczb jest większa, $\frac{p}{2} + \frac{q}{2}$ czy q ?
33. Smok ma 2020 głów. Rycerz może ściąć jednym cięciem 33 głowy lub 21 głów lub 17 głów lub 1 głowę. Smokowi odrasta odpowiednio 48, 0, 14 i 349 głów jednocześnie, tzn. jeśli rycerz zetnie 33 głowy, to smokowi odróśnie 48 głów itd. Smok zostanie zabity, jeśli wszystkie głowy zostaną ścięte. Czy rycerz może zabić smoka? Odpowiedź uzasadnij.
34. Która z liczb jest większa $\left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{11}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{3}{2015}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{2018}\right)$ czy $\frac{1}{2^{10}}$?

Uwaga I: Dodatkowe zadania przygotowawcze można znaleźć w książce „Liga Zadaniowa” str. 9-10, 15-18, w książce „Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego” zadania 228-231, 237, 240-241, 243-258, 283-285, 295-296, 312-337 oraz w książce „Koło matematyczne w szkole podstawowej” str. 121-131.

Uwaga II: W soboty, począwszy od 12 października, o godzinie 9:00 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VI (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową”. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej <http://liga.mat.umk.pl> Serdecznie zapraszamy.